**प्रश्नावली 2(B)**

**Problem 1**

निम्नलिखित श्रेणियों का योग ज्ञात करो—

Find the sum of the following series :

(i) $\frac{16}{27} - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} - \ldots$ 7 पदों तक upto 7 terms

(ii) $1 + \sqrt{3} + 3 + \ldots$ 8 पदों तक upto 8 terms

(iii) $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + \ldots$ 20 पदों तक upto 20 terms

(iv) $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots$ $n$ पदों तक upto $n$ terms

(v) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \ldots$ $n$ पदों तक upto $n$ terms

(vi) $a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \ldots$ $n$ पदों तक upto $n$ terms

**Solution**

(i) यहाँ $a = \frac{16}{27}, ar = -\frac{8}{9}, ar^2 = \frac{4}{3}, \ldots$

$\therefore$ सार्व अन्तर $r = \frac{ar}{a} = -\frac{8}{9}\left(\frac{27}{16}\right) = -\frac{3}{2}$

7 पदों का योग

$$S_7 = \frac{a(1-r^7)}{(1-r)} = \frac{\frac{16}{27}\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right]}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{16}{27}\left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^7\right]}{1+\frac{3}{2}} = \frac{16}{27}\left\{\frac{1+\frac{2187}{128}}{1+\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{16}{27}\cdot\frac{\frac{(128+2187)}{128}}{\left(\frac{2+3}{2}\right)} = \frac{16}{27}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5} = \frac{463}{108}$$

(ii) यहाँ $a = 1, ar = \sqrt{3}, ar^2 = 3$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{ar}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\Rightarrow \quad S_8 = \frac{1[(\sqrt{3}^8)-1]}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{3^{8/2}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3^4-1}{\sqrt{3}-1} \quad \ldots(1)$$

$$= \frac{(3^4-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \quad \text{अंश तथा हर में } \sqrt{3}+1 \text{ से गुणा करने पर}$$

$$= \frac{(81-1)(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= \frac{80(\sqrt{3}+1)}{2} = 40(\sqrt{3}+1) \quad \ldots(2)$$

(iii) $a = 2, ar = 0.2, ar^2 = 0.02, \ldots$

अत: $r = \frac{ar}{a} = \frac{0.2}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\Rightarrow \quad S_{20} = \frac{2\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]}{1-\frac{1}{10}}$$

Prof. Anil Kumar Mahto, Department of Commerce, J. N. College, Madhubani.

$$= \frac{2\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]}{\frac{10-1}{10}}$$

$$= 2 \times \frac{10}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]$$

$$= \frac{20}{9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]$$

(iv) $a = 2, ar = \frac{4}{3}, ar^2 = \frac{8}{9}, ....$

अत: $r = \frac{ar}{a} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{3-2}{3}}$$

$\Rightarrow$ $$S_n = \frac{2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{\frac{1}{3}} = 2 \times 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$= 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

(v) यहाँ प्रथम पद, $T_1 = 1$, द्वितीय पद, $T_2 = \frac{1}{a}$

अत: $r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1/a}{1} = \frac{1}{a}$

तथा $S_n = \frac{T_1(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^n}{\frac{a-1}{a}} = \left(\frac{a^n-1}{a^n}\right) \cdot \left(\frac{a}{a-1}\right)$$

$$= \frac{a^n - 1}{a^{n-1}(a-1)}$$

(vi) यहाँ प्रथम पद, $T_1 = a$, द्वितीय पद, $T_2 = ar = b$

$\Rightarrow$ $\frac{ar}{a} = r = \frac{b}{a}$

अत: $$S_n = \frac{a(r^n-1)}{a-1} = \frac{a\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - 1\right]}{\left(\frac{b}{a}\right) - 1}, \text{ यदि } b > a \text{ हो}$$

$$= \frac{a(b^n - a^n)/a^n}{(b-a)/a}$$

$$= \frac{a^2(b^n - a^n)}{a^n(b-a)} = \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b-a)}$$

**Problem 2**

निम्नलिखित श्रेणी का 30 पदों तक योग ज्ञात करो—

Find the sum upto 30 terms of the series :

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + .....$

**Solution**

यहाँ $a = 1,\ r = 2$

अत: $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$\Rightarrow$ $S_{30} = \left\{\frac{1(2^{30}-1)}{2^{30}-1}\right\}$

**Problem 3**

गुणोत्तर श्रेढी 4, 2, 1.....के कितने पदों का योग $\frac{127}{16}$ होगा ?

How many terms of a G.P. 4, 2, 1......amount to $\frac{127}{16}$ ?

**Solution**

यहाँ $a = 4, r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

मान लिया $n$ पदों का योग $\frac{127}{16}$ है।

अत: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\Rightarrow$ $$\frac{127}{16} = \frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{(2-1)/2}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{127}{16} = 4 \times 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$\Rightarrow$ $$\frac{127}{16 \times 8} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow$ $$\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{127}{128} = \frac{128-127}{128} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$\Rightarrow$ $n = 7$

**Problem 4**

किसी गु.श्रे. का पहला पद 4 तथा चौथा पद 108 है। सार्व अनुपात तथा चार पदों का योग बताइए।

The first term of a G.P. is 4 and 4th term is 108. Find the common ratio and the sum of four terms.

**Solution**

यहाँ $a = 4,\ T_4 = ar^3 = 108$

$$\Rightarrow \quad \frac{ar^3}{a} = \frac{108}{4}$$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 27 = 3^3$$

$$\therefore \quad r = 3 \qquad \text{....(1)}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\Rightarrow \quad S_4 = \frac{4(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{4\,(81 - 1)}{2} = 2 \times 80 = 160$$

**Problem 5**

यदि किसी गु.श्रे. के लिए $S_2 = 8$ तथा $S_4 = 80$ हो तो उसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

If for a G.P., $S_2 = 8$ and $S_4 = 80$, find its first term and the common ratio.

**Solution**

मान लो गु.श्रे. $a, ar, ar^2, \ldots$ है।

$$\text{अतः} \quad S_2 = \frac{a(1 - r^2)}{1 - r} = 8 \qquad \text{....(1)}$$

$$S_4 = \frac{a(1 - r^4)}{1 - r} = 80 \qquad \text{...(2)}$$

समीकरण (2) को समीकरण (1) से भाग देने पर,

$$\frac{1 - r^4}{1 - r^2} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1 - r^2)(1 + r^2)}{1 - r^2} = 10$$

$$\Rightarrow \quad 1 + r^2 = 10,\ \text{यदि}\ r^2 \neq -1$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 10 - 1 = 9$$

$$\therefore \quad r = \pm 3$$

क्योंकि $S_4$ का मान $S_2$ से अधिक है अतः $r = 3$ उचित मान है। $r$ के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{a(1 - 3^2)}{(1 - 3)} = 8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(1 - 9)}{1 - 3} = 8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-8a}{-2} = 8$$

$$\Rightarrow \quad 4a = 8$$

$$\therefore \quad a = \frac{8}{4} = 2$$

**Problem 6**

श्रेणी $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots$ के कितने पदों का योग $(30 + 14\sqrt{2})$ होगा।

How many terms of the series $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots$ amount to $(30 + 14\sqrt{2})$.

**Solution**

यहाँ $a = 2,\ ar = 2\sqrt{2},\ ar^2 = 4, \ldots$

$$\Rightarrow \quad \frac{ar}{a} = r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

मान लो $n$ पदों का योग $(30 + 14\sqrt{2})$ है।

$$\text{अतः} \quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$\Rightarrow \quad 30 + 14\sqrt{2} = \frac{2[(\sqrt{2})^n - 1]}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{30 + 14\sqrt{2}}{2} = \frac{[(\sqrt{2})^n - 1]}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 15 + 7\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Rightarrow \quad (15 + 7\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 15\sqrt{2} - 15 + 7\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 7\sqrt{2} = (\sqrt{2})^n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 15\sqrt{2} - 7\sqrt{2} - 15 + 14 + 1 = (\sqrt{2})^n$$

$$\Rightarrow \quad 8\sqrt{2} = (\sqrt{2})^n$$

$$\Rightarrow \quad 2^3 . 2^{1/2} = 2^{n/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{3 + 1/2} = 2^{n/2}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{7/2} = 2^{n/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad n = 7$$

**Problem 7**

उस श्रेणी के $n$ पदों का योग बताओ जिसका $r$वाँ पद (i) $3^r - 1$, (ii) $2^r + 3r$ है।

Sum to $n$ terms the series whose $r$th term is (i) $3r - 1$, (ii) $2^r + 3r$.

**Solution**

(i) $r$वाँ पद, $\quad T_r = 3^r - 1$

$$\Rightarrow \quad T_1 = 3^1 - 1$$

$$T_2 = 3^2 - 1$$

$$T_3 = 3^3 - 1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$T_n = 3^n - 1$$

$n$ पदों का योग,

$$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

$$= 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n - \underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n\ \text{बार}}$$

$$= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n$$

Prof. Anil Kumar Mahto, Department of Commerce, J. N. College, Madhubani.

$$= \frac{3^{n+1} - 3}{2} - n$$

$$= \frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{2}$$

(ii) $r$वाँ पद, $T_r = 2^r + 3r$

$\Rightarrow$ $T_1 = 2 + 3 \times 1$

$T_2 = 2^2 + 3 \times 2$

$T_3 = 2^3 + 3 \times 3$

– – – –

$T_n = 2^n + 3 \times n$

अत: $S_n = T_1 + T_2 + .... + T_n$

$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n + 3(1 + 2 + .... + n)$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= 2(2^n - 1) + \frac{3}{2}n(n+1)$$

**Problem 8**

गु. श्रे. के सार्व अनुपात, अन्तिम पद तथा योग क्रमश: 3, 486 तथा 728 हैं । प्रथम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात करो ।

The common ratio, last ferm and the sum of G.P. are 3, 486 and 728 respectively. Find the first term and the number of terms.

**Solution**

मान लो गु. श्रे. $a, ar, ar^2$, ..... है

अत: $r = 3$, अन्तिम पद, $T_n = 486$ तथा $S_n = 728$

$T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow$ $486 = a.3^{n-1}$

$\Rightarrow$ $a = 486/3^{n-1}$ ....(1)

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$\Rightarrow$ $728 = \dfrac{a(3^n - 1)}{3 - 1} = \dfrac{a(3^n - 1)}{2}$ ....(2)

$\Rightarrow$ $728 = \dfrac{486}{3^{n-1}} \times \dfrac{3^n - 1}{2}$ ($a$ का मान रखने पर)

$\Rightarrow$ $728 = 243 \times \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{728}{243} = 3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 - \dfrac{728}{243} = \dfrac{729 - 728}{243}$

$\Rightarrow$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{243} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^5$

$\Rightarrow$ $n - 1 = 5$

$\therefore$ $n = 5 + 1 = 6$

$n$ के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$a = \frac{486}{3^5} = \frac{486}{243} = 2$$

$\therefore$ $a = 2, n = 6$

**Problem 9**

उस गु. श्रे. को ज्ञात करो जिसका अनन्त पदों तक योग 3 तथा दूसरा पद – 18 है ।

Find a G.P. whose sum upto infinite terms is 3 and the second term is – 18.

**Solution**

मान लिया गु. श्रे. $a, ar, ar^2, ... \infty$ है ।

अत: अनन्त तक योग $(S_\infty) = \dfrac{a}{1 - r}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{a}{1 - r} = 3$

$\Rightarrow$ $a = 3(1 - r)$ ....(1)

दूसरा पद, $T_2 = ar = -18$ ....(2)

समीकरण (1) से $a$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$3(1 - r)r = -18$ $\left(\because a = \dfrac{-18}{r}\right)$

$\Rightarrow$ $3r - 3r^2 = -18$

$\Rightarrow$ $3r - 3r^2 + 18 = 0$

$\Rightarrow$ $3r^2 - 3r - 18 = 0$

$\Rightarrow$ $r^2 - r - 6 = 0$ (3 से भाग देने पर)

$\Rightarrow$ $r^2 - 3r + 2r - 6 = 0$

$\Rightarrow$ $r(r - 3) + 2(r - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $(r - 3)(r + 2) = 0$

$\therefore$ $r = -2, r = 3$

$r = 3$ उचित मान नहीं है क्योंकि इससे $a = -6$ आता है जिससे प्रत्येक ऋणात्मक होगा तथा उसका योग नहीं हो सकता ।

$r$ के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$a = 3[1 - (-2)] = 3(1 + 2) = 3 \times 3 = 9$$

अत: श्रेणी, $9, 9 \times (-2), 9 \times (-2)^2, ...$ होगी

अर्थात् 9, – 18, 36, ....होगी ।

**Problem 10**

$n$ पदों का योग ज्ञात करो—

Find the sum upto $n$ terms :

(i) 5 + 55 + 555 + .....

(ii) 9 + 99 + 999 + ....

(iii) 0.3 + 0.33 + 0.333 + ....

(iv) 7 + 77 + 777 + .....

**Solution**

(i) माना कि $n$ पदों का योगफल $S$ है

अत: $S = 5 + 55 + 555 + ... n$ पदों तक

$= 5[1 + 11 + 111 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots n$ पदों तक]

अंश तथा हर में 9 से गुणा करने पर,

$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n$ पदों तक$) - n]$

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$, गु. श्रे. के $n$ पदों का योग करने पर,

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}\right]$$

$$= \frac{5}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$$

(ii) $S = 9 + 99 + 999 + \ldots$

$= \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$, उपर्युक्त (i) की तरह

(iii) $S = 0.3 + 0.33 + 0.333 + \ldots n$ पदों तक

$= 3[0.1 + 0.11 + 0.111 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{3}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{3}{9}[(1 - 0.1) + (1 - 0.01) + (1 - 0.001) + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{3}{9}[n - \{0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots n$ पदों तक$\}]$

$$= \frac{3n}{9} - \frac{3}{9}\left[\frac{0.1\{1 - (0.1)^n\}}{1 - 0.1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{3n}{9} - \frac{3}{9}\left[\frac{\frac{1}{10}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{\frac{9}{10}}\right]$$

$$= \frac{3n}{9} - \frac{3}{9 \times 9}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{3n}{9} - \frac{3}{81}\left\{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right\} \qquad \ldots(1)$$

अथवा $$S = \frac{3n}{9} + \frac{3}{81}\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right\} \qquad \ldots(2)$$

$$= \frac{n}{3} + \frac{1}{27}\left\{\frac{1}{10^n} - 1\right\} \qquad \ldots(3)$$

(iv) $S = 7 + 77 + 777 + \ldots n$ पदों तक

$= 7(1 + 11 + 111 + \ldots n$ पदों तक)

$= \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots n$ पदों तक)

$= \frac{7}{9}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{7}{9}[\{10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n$ पदों तक$\} - n]$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7}{9}n$$

**Problem 11**

किसी गुणोत्तर श्रेढी (जहाँ सार्व अनुपात धनात्मक है) के चौथे तथा बारहवें पद का अनुपात 1 : 256 है। यदि इन पदों का अन्तर 61.2 हो तो इस श्रेणी का 8 पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

The ratio of the fourth and 12th term of a G.P. with a positive common ratio is 1 : 256. If the difference of the two terms be 61.2, find the sum of 8 terms of this series.

**Solution**

मान लिया गु. श्रे. $a, ar, ar^2, \ldots$ है जहाँ $r$ धनात्मक है।

चौथा पद, $T_4 = ar^3$

बारहवाँ पद, $T_{12} = ar^{11}$

अतः $\frac{T_4}{T_{12}} = \frac{ar^3}{ar^{11}} = \frac{1}{256}$

$\Rightarrow \quad \frac{ar^{11}}{ar^3} = \frac{256}{1}$

$\Rightarrow \quad r^8 = 256 = 2^8$

$\therefore \quad r = 2$

$\Rightarrow \quad T_{12} - T_4 = 61.2$

$\Rightarrow \quad ar^{11} - ar^3 = 61.2$

$\Rightarrow \quad ar^3(r^8 - 1) = 61.2$

$\Rightarrow \quad a.2^3(256 - 1) = 61.2$

$\therefore \quad a = \frac{61.2}{8 \times 255} = 0.03$

अतः 8 पदों का योग

$$S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{0.03(256 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 0.03 \times 255 = 7.65$$

**Problem 12**

एक गुणोत्तर श्रेढी का पहला पद 1 है तथा 3 पदों का योग 13 है। सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

In a G.P. which begins with 1, the sum of three terms is 13. Find the common ratio.

**Solution**

माना कि पहला पद $a$ तथा सार्व अनुपात $r$ है।

अतः $\left.\begin{array}{r} a = 1 \\ a + ar + ar^2 = 13 \end{array}\right\}$ ज्ञात है।

$\Rightarrow \quad 1 + r + r^2 = 13$ ($a$ का मान रखने पर)

$\Rightarrow \quad r^2 + r - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2 + 4r - 3r - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad r(r + 4) - 3(r + 4) = 0$

$\Rightarrow \quad (r + 4)(r - 3) = 0$

$\therefore \quad r = -4$ या $r = 3$

**Problem 13**

गुणोत्तर श्रेढी की तीन क्रमागत संख्याओं का योग 35 है और उनका गुणनफल 1,000 है। संख्याएँ ज्ञात करो।

The sum of three consecutive numbers in G.P. is 35 and their product is 1,000. Find the numbers.

**Solution**

माना कि गु. श्रे. की तीन क्रमागत संख्याएँ $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

संख्याओं का योग $= \frac{a}{r} + a + ar = 35$ ...(1)

संख्याओं का गुणनफल $= \frac{a}{r} \times a \times ar = 1000$

$\Rightarrow \quad a^3 = 1000 = 10^3$

$\therefore \quad a = 10$ ...(2)

$a$ के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35$$

$\Rightarrow \quad 10 + 10r + 10r^2 = 35r$ ($r$ से गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad 10r^2 + 10r - 35r + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad 10r^2 - 25r + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad 10r^2 - 20r - 5r + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad 10r(r - 2) - 5(r - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad (r - 2)(10r - 5) = 0$

$\therefore \ r = 2$ या $r = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $\frac{10}{2}, 10, 10 \times 2$ अर्थात् 5, 10, 20

या $\frac{10}{\frac{1}{2}}, 10, 10 \times \frac{1}{2}$ अर्थात् 20, 10, 5

**Problem 14**

गुणोत्तर श्रेढी की तीन क्रमागत संख्याओं का योग 38 है और उनका गुणनफल 1,728 है। संख्याएँ ज्ञात करो।

The sum of three consecutive numbers in G.P. is 38 and their product is 1,728. Find the numbers.

**Solution**

माना कि गु. श्रे. की तीन क्रमागत संख्याएँ $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

संख्याओं का योग $= \frac{a}{r} + a + ar = 38$ ...(1)

संख्याओं का गुणनफल $= \frac{a}{r} \times a \times ar = 1728$

$\Rightarrow \quad a^3 = 1728 = 12^3$

$\therefore \quad a = 12$

$a$ के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{12}{r} + 12 + 12r = 38$$

$\Rightarrow \quad 12 + 12r + 12r^2 = 38r$ ($r$ से गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad 12r^2 + 12r - 38r + 12 = 0$

$\Rightarrow \quad 12r^2 - 26r + 12 = 0$

$\Rightarrow \quad 6r^2 - 13r + 6 = 0$ (2 से भाग देने पर)

$\Rightarrow \quad 6r^2 - 9r - 4r + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad 3r(2r - 3) - 2(2r - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad (2r - 3)(3r - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad 2r = 3$ या $3r = 2$

$\therefore \quad r = \frac{3}{2}$ या $r = \frac{2}{3}$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $\frac{12}{\frac{3}{2}}, 12, 12 \times \frac{3}{2}$ अर्थात् 8, 12, 18

या $\frac{12}{\frac{2}{3}}, 12, 12 \times \frac{2}{3}$ अर्थात् 18, 12, 8

**Problem 15**

चार पूर्णांक संख्याओं $a, b, c, d$ के मान ज्ञात कीजिए यदि $a, b, c$ गु. श्रे. में हों; $b, c, d$ स. श्रे. में हों तथा $c + d = 20, a + b = 6$।

Find four integers $a, b, c, d$ such that $a, b, c$ are in G.P.; $b, c, d$ are in A.P. and $c + d = 20, a + b = 6$.

**Solution**

ज्ञात है : $\quad c + d = 20$ ....(1)

$a + b = 6$ ....(2)

$\Rightarrow \quad a + b + c + d = 26$ ....(3)

माना कि $\quad a = a, b = ar, c = ar^2$ गु. श्रे. के तीन पद हैं

अतः $\quad a + b = a + ar = a(1 + r) = 6$

$\Rightarrow \quad a = \frac{6}{1 + r}$ ...(4)

क्योंकि $b, c, d$ स. श्रे. में हैं

अतः $\quad 2c = b + d$

$\Rightarrow \quad 2c - b = d$

$\Rightarrow \quad 2c - b + c = c + d$ {दोनों ओर $c$ जोड़ने पर}

$\Rightarrow \quad 3c - b = 20$ {समी. (1) से $c + d = 20$}

$\Rightarrow \quad 3ar^2 - ar = 20,$ मान रखने पर

$$\Rightarrow \quad 3\left(\frac{6}{1+r}\right)r^2 - \frac{6r}{1+r} = 20 \qquad \left(a = \frac{6}{1+r} \text{ रखने पर}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{18r^2}{1+r} - \frac{6r}{1+r} = 20$$

$$\Rightarrow \quad 18r^2 - 6r = 20(1+r) = 20 + 20r$$

$$\Rightarrow \quad 18r^2 - 6r - 20r - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18r^2 - 26r - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9r^2 - 13r - 10 = 0 \qquad \text{(2 से भाग देने पर)}$$

$$\Rightarrow \quad 9r^2 - 18r + 5r - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 9r(r-2) + 5(r-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r-2)(9r+5) = 0$$

$$\therefore \quad r = 2 \quad \text{या} \quad r = -\frac{5}{9}$$

$r = 2$ के लिए, $a = \frac{6}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$

अतः $a = 2, b = 2 \times 2 = 4, c = 2 \times 2^2 = 8,$

तथा $d = 26 - (a + b + c) = 26 - (2 + 4 + 8) = 12$ (समीकरण (3) से)

**Problem 16**

एक स. श्रे. में तीन क्रमागत पदों का योग 15 है। यदि उसमें 1, 4 तथा 19 क्रमशः जोड़ दिये जायें तो परिणाम गु. श्रे. में होता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

The sum of three consecutive numbers in A.P. is 15. If 1, 4 and 19 are added to them respectively the resulting series is in G.P. Find the numbers.

**Solution**

माना कि स. श्रे. के तीन क्रमागत पद $a - d, a, a + d$ हैं।

तीनों का योग $= (a - d) + a + (a + d) = 15$

$$\Rightarrow \quad 3a = 15$$

$$\therefore \quad a = \frac{15}{3} = 5 \qquad ...(1)$$

उपर्युक्त तीन क्रमागत पदों में क्रमशः 1, 4, 19 जोड़ने पर,

$(a - d) + 1, (a + 4), (a + d + 19)$ गु. श्रे. में हो जाते हैं।

$$\Rightarrow \quad (a+4)^2 = (a - d + 1)(a + d + 19)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 8a + 16 = a^2 + ad + 19a - ad - d^2 - 19d + a + d + 19$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 8a + 16 = a^2 - d^2 + 20a - 18d + 19$$

$$\Rightarrow \quad d^2 - 12a + 18d - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d^2 - 12 \times 5 + 18d - 3 = 0 \qquad (a = 5 \text{ रखने पर})$$

$$\Rightarrow \quad d^2 - 60 + 18d - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d^2 + 18d - 63 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d^2 + 21d - 3d - 63 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d(d + 21) - 3(d + 21) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (d + 21)(d - 3) = 0$$

$$\therefore \quad d = 3 \quad \text{या} \quad d = -21$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ हैं $5 - 3, 5, 5 + 3$ अर्थात् 2, 5, 8

अथवा $5 - (-21), 5, 5 + (-21)$ अर्थात् 26, 5, − 16

**Problem 17**

एक कार ₹ 80,000 में खरीदी जाती है। प्रथम तीन वर्षों के लिए उसके मूल्य में 5% वार्षिक ह्रास होता है उसके पश्चात् के तीन वर्षों में यह ह्रास 10% वार्षिक होता है। ह्रास की गणना उसकी घटती हुई कीमत पर की जाती है। छः वर्षों पश्चात् कार की कीमत ज्ञात कीजिए।

A car is purchased for ₹ 80,000. Depreciation is calculated at 5% per annum for the next 3 years and after that 10% per annum for the next 3 years. Depreciation being calculated on diminishing value. Find the value of the car after a period of 6 years.

**Solution**

माना कि : $a = 80{,}000, r = \left(1 - \frac{5}{100}\right)$

तीन वर्ष बाद कार का मूल्य $= ar^3 = 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

आगे के तीन वर्ष के लिए $a = 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3$

तथा $r = \left(1 - \frac{10}{100}\right)$

अतः छः वर्ष पश्चात् कार का मूल्य $= 80{,}000\left(1 - \frac{5}{100}\right)^3\left(1 - \frac{10}{100}\right)^3$

$= ₹\ 50{,}002$

**Problem 18**

एक मशीन का वर्तमान मूल्य ₹ 243 है। यह हर वर्ष अपना एक-तिहाई मूल्य खो देती है। यदि $y$ वर्षों तक प्रयोग करने के बाद इसका मूल्य $x$ रह जाय तो सिद्ध करो कि $\log x = (5 - y)\log 3 + y \log 2$.

A machine is worth ₹ 243. It loses one-third of its value yearly. If ₹ $x$ be the value after the machine has been in use $y$ years, prove that $\log x = (5 - y)\log 3 + y\log 2$.

**Solution**

माना कि मशीन का वर्तमान मूल्य, $a = 243$

यह मशीन हर वर्ष अपना एक-तिहाई मूल्य खो देती है

अर्थात् एक वर्ष बाद मूल्य $= 243 - 243 \times \frac{1}{3}$

$= 243\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 243 \times \frac{2}{3}$

दो वर्ष बाद मूल्य $= 243 \times \frac{2}{3} - \left(243 \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3}$

$= 243 \times \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$= 243 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 243 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

इस प्रकार प्रत्येक वर्ष के बाद मशीन के मूल्य एक गु. श्रे. बनाते हैं जिसका प्रथम पद $= 243 \times \frac{2}{3}$ तथा सार्वअन्तर $r = \frac{2}{3}$ है।

अतः $y$ वर्ष बाद मूल्य = गु. श्रे. का $y$वाँ पद

$$\Rightarrow \quad x = ar^{y-1}$$

$$\Rightarrow \quad x = 243 \times \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{y-1}$$

$$\Rightarrow \quad x = 81 \times 2\left(\frac{2}{3}\right)^{y-1}$$

$$\Rightarrow \quad = 2 \times 3^4 \times \frac{2^{y-1}}{3^{y-1}}$$

$$\therefore \quad x = 2^y . 3^{5-y}$$

दोनों ओर लघुगणक लेने पर,

$$\log x = y \log 2 + (5 - y) \log 3$$

**Problem 19**

निम्नलिखित श्रेणी किस प्रकार की है और श्रेणी के अनुसार, श्रेणी का सार्व अन्तर या सार्व अनुपात भी बताइए :

Find the nature of following series ? And according to series, find common difference or common ratio of the series :

(i) $\frac{10}{13}, \frac{5}{13}, \frac{5}{26}, \frac{5}{52}$ (ii) $\frac{12}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}, 0$

**Solution**

(i) दी हुयी श्रेणी निम्नलिखित है :

$\frac{10}{13}, \frac{5}{13}, \frac{5}{26}, \frac{5}{52}$

उपरोक्त श्रेणी के पदों को देखकर यह स्पष्ट है कि उपरोक्त श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी है। क्योंकि दो पदों के बीच का अनुपात समान है।

$$\because \quad \frac{5}{13}\Big/\frac{10}{13} = \frac{1}{2} = \frac{5}{26}\Big/\frac{5}{13} = \frac{5}{52}\Big/\frac{5}{26}$$

$\therefore$ प्रत्येक पद में एक सार्व अनुपात $(r) = \frac{1}{2}$ है।

(ii) ज्ञात श्रेणी निम्नलिखित है :

$\frac{12}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}, 0$

$\because$ प्रत्येक दो पदों के बीच का अन्तर समान है।

$\therefore$ दी गयी श्रेणी समान्तर श्रेढी है।

तथा सार्व अन्तर $= \frac{8}{15} - \frac{12}{15} = \frac{4}{15} - \frac{8}{15} = \frac{-4}{15}$