

ILLUSTRATIONS

Problem 1

उस हरात्मक श्रेणी के पहले तीन पद ज्ञात करो जिसके चौथे और आठवें पद क्रमशः $\frac{3}{5}$ और $\frac{1}{3}$ हों।

Find first three terms of a H.P. whose fourth and eighth terms are $\frac{3}{5}$ and $\frac{1}{3}$ respectively.

Solution

$$\text{हरात्मक श्रेणी का चौथा पद} = \frac{3}{5}$$

$$\text{आठवाँ पद} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{समान्तर श्रेणी का चौथा पद} = \frac{3}{5} = a + 3d \quad \dots(1)$$

$$\text{आठवाँ पद} = \frac{1}{3} = a + 7d \quad \dots(2)$$

घटाने पर,

$$\frac{5}{3} - 3 = -4d$$

$$\Rightarrow \frac{5-9}{3} = -4d$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} = -4d$$

$$\therefore d = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{-4} = \frac{1}{3}$$

d के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर,

$$3 = a + 7 \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = 3 - \frac{7}{3} = \frac{9-7}{3} = \frac{2}{3}$$

अतः समान्तर श्रेणी के पहले तीन पद हैं,

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$$

अतः अभीष्ट हरात्मक श्रेणी के पहले तीन पद हैं,

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}$$

अर्थात्

$$\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}$$

Problem 2

श्रेणी $4 + 4\frac{2}{7} + 4\frac{8}{13} + 5 + \dots$ का सातवाँ तथा n वाँ पद ज्ञात करो।

Find 7th and n th term of the series $4 + 4\frac{2}{7} + 4\frac{8}{13} + 5 + \dots$

Solution

$$4 + 4\frac{2}{7} + 4\frac{8}{13} + \dots$$

$$= 4 + \frac{30}{7} + \frac{60}{13} + \dots$$

$$\text{यहाँ } \frac{1}{4}, \frac{7}{30}, \frac{13}{60}, \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{30} - \frac{1}{4} = \frac{14-15}{60} = -\frac{1}{60} \\ \frac{13}{60} - \frac{7}{30} = \frac{13-14}{60} = -\frac{1}{60} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{7}{30}, \frac{13}{60}, \dots \text{ एक स. श्रे. है जहाँ } a = \frac{1}{4}, d = -\frac{1}{60}$$

इस श्रेणी का सातवाँ पद,

$$T_7 = a + 6d$$

$$= \frac{1}{4} + 6 \times \left(-\frac{1}{60}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5-2}{20} = \frac{3}{20} \quad \dots(1)$$

इस श्रेणी का n वाँ पद,

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$= \frac{1}{4} + (n-1) \left(-\frac{1}{60}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{n}{60} + \frac{1}{60}$$

$$= \frac{15-n+1}{60} = \frac{16-n}{60} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से स्पष्ट है कि दी हुई हरात्मक श्रेणी का

$$\text{सातवाँ पद} = \frac{20}{3}$$

तथा

$$n\text{वाँ पद} = \frac{60}{16-n}$$

Problem 3

$\frac{4}{9}$ और $-2\frac{2}{5}$ के बीच तीन हरात्मक माध्य प्रविष्ट करो।

Insert three H. Ms. between $\frac{4}{9}$ and $-2\frac{2}{5}$.

Solution

$\frac{4}{9}$ और $-\frac{2}{5}$ के बीच तीन हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए $\frac{9}{4}$ और $-\frac{5}{12}$ के बीच तीन समान्तर माध्य ज्ञात करें—

माना कि तीन स. मा. M_1, M_2, M_3 हैं। अतः

$$\frac{9}{4}, M_1, M_2, M_3, -\frac{5}{12} \text{ स. श्रे. में हैं}$$

$$\text{जहाँ } a = \frac{9}{4} \text{ तथा पाँचवाँ पद} = a + 4d = -\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} + 4d = -\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow 4d = -\frac{5}{12} - \frac{9}{4} = \frac{-5-27}{12} = -\frac{32}{12}$$

$$\therefore d = \frac{-32}{12 \times 4} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{अतः } M_1 = a + d = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

$$M_2 = a + 2d = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{27-16}{12} = \frac{11}{12}$$

$$M_3 = a + 3d = \frac{9}{4} - \frac{6}{3} = \frac{27-24}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

अतः अभीष्ट हरात्मक माध्य हैं,

$$H_1 = \frac{1}{M_1} = \frac{12}{19}, H_2 = \frac{1}{M_2} = \frac{12}{11}, H_3 = \frac{1}{M_3} = 4.$$

Problem 4

1 और 16 के बीच में 4 हरात्मक माध्य प्रविष्ट करो।

Insert 4 H. Ms. between 1 and 16.

Solution

मान लो 1 और $\frac{1}{16}$ के बीच 4 समान्तर माध्य M_1, M_2, M_3 तथा M_4 हैं।

अतः $1, M_1, M_2, M_3, M_4, \frac{1}{16}$ स. श्रे. में हैं।

जहाँ पहला पद $a = 1$, छठा पद, $T_6 = a + 5d = \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow 1 + 5d = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow 5d = \frac{1}{16} - 1 = \frac{1-16}{16} = \frac{-15}{16}$$

$$\therefore d = -\frac{15}{16 \times 5} = -\frac{3}{16}$$

$$\text{अतः } M_1 = a + d = 1 - \frac{3}{16} = \frac{16-3}{16} = \frac{13}{16}$$

$$M_2 = a + 2d = 1 - \frac{6}{16} = \frac{16-6}{16} = \frac{10}{16}$$

$$M_3 = a + 3d = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16-9}{16} = \frac{7}{16}$$

$$M_4 = a + 4d = 1 - \frac{12}{16} = \frac{16-12}{16} = \frac{4}{16}$$

इस प्रकार 1 और 16 के बीच 4 हरात्मक माध्य इस प्रकार हैं—

$$H_1 = \frac{1}{M_1} = \frac{16}{13} \quad H_2 = \frac{1}{M_2} = \frac{16}{10}$$

$$H_3 = \frac{1}{M_3} = \frac{16}{7} \quad H_4 = \frac{1}{M_4} = \frac{16}{4} = 4$$

Problem 5

1 और $\frac{1}{16}$ के बीच में 4 हरात्मक माध्य प्रविष्ट करो।

Insert 4 H. Ms. between 1 and $\frac{1}{16}$.

Solution

यदि 1 और 16 के बीच 4 समान्तर माध्य M_1, M_2, M_3, M_4 हों तो $1, M_1, M_2, M_3, M_4, 16$ समान्तर श्रेणी में हैं।

जहाँ पहला पद $a = 1$ तथा छठवाँ पद $a + 5d = 16$

$$1 + 5d = 16$$

$$5d = 15$$

$$d = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore M_1 = a + d = 1 + 3 = 4$$

$$M_2 = a + 2d = 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$

$$M_3 = a + 3d = 1 + 3 \times 3 = 1 + 9 = 10$$

$$M_4 = a + 4d = 1 + 4 \times 3 = 1 + 12 = 13$$

$\therefore$ 1 और $\frac{1}{16}$ के बीच 4 हरात्मक माध्य होंगे—

$$H_1 = \frac{1}{M_1} = \frac{1}{4} \quad H_2 = \frac{1}{M_2} = \frac{1}{7}$$

$$H_3 = \frac{1}{M_3} = \frac{1}{10} \quad H_4 = \frac{1}{M_4} = \frac{1}{13}$$

Problem 6

4 और $\frac{6}{23}$ के बीच में 6 हरात्मक माध्य प्रविष्ट करो।

Insert 6 H. Ms. between 4 and $\frac{6}{23}$.

Solution

यदि $\frac{1}{3}$ और $\frac{23}{6}$ के बीच 6 समान्तर माध्य $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ हों तो $\frac{1}{3}, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, \frac{23}{6}$ स. श्रे. में हैं।

जहाँ पहला पद $a = \frac{1}{3}$ तथा आठवाँ पद, $a + 7d = \frac{23}{6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + 7d = \frac{23}{6}$$

$$\Rightarrow 7d = \frac{23}{6} - \frac{1}{3} = \frac{23-2}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore d = \frac{7}{2 \times 7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{अतः } M_1 = a + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$M_2' = a + 3d = \frac{1}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2+6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$M_3 = a + 3d = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6}$$

$$M_4 = a + 4d = \frac{1}{3} + \frac{4}{2} = \frac{2+12}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$M_5 = a + 5d = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2+15}{6} = \frac{17}{6}$$

$$M_6 = a + 6d = \frac{1}{3} + \frac{6}{2} = \frac{2+18}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

अतः 3 और $\frac{6}{23}$ के बीच 6 हरात्मक माध्य होंगे—

$$H_1 = \frac{1}{M_1} = \frac{6}{5}$$

$$H_2 = \frac{1}{M_2} = \frac{3}{4}$$

$$H_3 = \frac{1}{M_3} = \frac{6}{11}$$

$$H_4 = \frac{1}{M_4} = \frac{3}{7}$$

$$H_5 = \frac{1}{M_5} = \frac{6}{17}$$

$$H_6 = \frac{1}{M_6} = \frac{3}{10}$$

Problem 7

दो संख्याओं का समान्तर माध्य उनके गुणोत्तर माध्य से $\frac{3}{2}$ अधिक है तथा गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य से $\frac{6}{5}$ अधिक है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

The arithmetic mean of two numbers exceeds the geometric mean by $\frac{3}{2}$ and geometric mean exceeds the harmonic mean by $\frac{6}{5}$. Find the numbers.

Solution

माना कि दो संख्याएँ a तथा b हैं।

प्रश्न के अनुसार,

$$\text{समान्तर माध्य} = \text{गुणोत्तर माध्य} + \frac{3}{2}$$

$$\text{अर्थात् } A = G + \frac{3}{2} \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा गुणोत्तर माध्य} = \text{हरात्मक माध्य} + \frac{6}{5}$$

$$\text{अर्थात् } G = H + \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow H = G - \frac{6}{5} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को गुणा करने पर,

$$AH = (G + \frac{3}{2})(G - \frac{6}{5})$$

$$\Rightarrow G^2 = G^2 - \frac{6G}{5} + \frac{3G}{2} - \frac{18}{10} \quad \{\because AH = G^2\}$$

$$\Rightarrow G^2 - G^2 = \frac{-12G + 15G}{10} - \frac{18}{10}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{3G}{10} - \frac{18}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3G}{10} = \frac{18}{10}$$

$$\therefore G = \frac{18}{10} \times \frac{10}{3} = 6 \quad \dots(3)$$

$$\text{परन्तु } G = \sqrt{ab}$$

$$\text{अतः } \sqrt{ab} = 6$$

$$\Rightarrow ab = 6^2 = 36 \quad \dots(4)$$

पुनः समीकरण (1) तथा (3) से,

$$A = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\text{परन्तु } A = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{अतः } \frac{a+b}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow a+b = 15 \quad \dots(5)$$

युगपत् समीकरण (4) व (5) को सरल करने पर,

$$a = 12, b = 3 \text{ या } a = 3, b = 12$$

Problem 8

यदि x_1, x_2, x_3, x_4 हरात्मक श्रेढी में हों तो प्रमाणित कीजिए—

If x_1, x_2, x_3, x_4 are in H.P. prove that :

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 = 3x_1x_4$$

Solution

x_1, x_2, x_3, x_4 हरात्मक श्रेढी में हैं

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4} \text{ समान्तर श्रेढी में हैं}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_3} = d, \text{ सार्व अन्तर}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} = \frac{x_2 - x_3}{x_2x_3} = \frac{x_3 - x_4}{x_3x_4} = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = dx_1x_2 \\ x_2 - x_3 = dx_2x_3 \\ x_3 - x_4 = dx_3x_4 \end{cases}$$

तीनों को जोड़ने पर,

$$x_1 - x_4 = d(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4) \quad \dots(1)$$

$$\text{पुनः } \frac{1}{x_4} - \frac{1}{x_1} = 3d$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_4}{x_1x_4} = 3d$$

$$\Rightarrow x_1 - x_4 = 3dx_1x_4 = 3dx_1x_4 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को तुलना करने पर,

$$d(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4) = 3dx_1x_4$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 = 3x_1x_4$$

Problem 9

यदि $a^x = b^y = c^z$ तथा a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध करो कि x, y, z हरात्मक श्रेणी में हैं।

If $a^x = b^y = c^z$ and a, b, c are in G.P., prove that x, y, z are in H.P.

Solution

ज्ञात है $a^x = b^y = c^z$... (1)

तथा a, b, c गु. श्रे. में हैं

$$\Rightarrow b^2 = ac \quad \dots (2)$$

मान लो $a^x = b^y = c^z = h$

$$\Rightarrow a = h^{1/x}, b = h^{1/y}, c = h^{1/z} \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) से,

$$b^2 = ac$$

$$\Rightarrow (h^{1/y})^2 = h^{1/x} \cdot h^{1/z}$$

$$\Rightarrow h^{2/y} = h^{1/x + 1/z}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \text{ समान्तर श्रेणी में हैं।}$$

$$\Rightarrow x, y, z \text{ हरात्मक श्रेणी में हैं।}$$

$$\left(\begin{array}{l} \therefore \text{आधार समान हैं} \\ \therefore \text{घातांक भी समान होंगे} \end{array} \right)$$

Problem 10

यदि H.P. का p वाँ पद, q वाँ पद तथा r वाँ पद क्रमशः a, b तथा c हों तो साबित करें कि :

$$bc(q-r) + ca(r-p) + ab(p-q) = 0$$

If p th, q th and r th terms of a H.P. be a, b and c respectively, then show that :

$$bc(q-r) + ca(r-p) + ab(p-q) = 0$$

Solution

हरात्मक श्रेणी का

$$p\text{वाँ पद} = a$$

$$q\text{वाँ पद} = b$$

$$r\text{वाँ पद} = c$$

$\Rightarrow$ समान्तर श्रेणी का

$$p\text{वाँ पद} = \frac{1}{a} = A + (p-1)d \quad \dots (1)$$

$$q\text{वाँ पद} = \frac{1}{b} = A + (q-1)d \quad \dots (2)$$

$$r\text{वाँ पद} = \frac{1}{c} = A + (r-1)d \quad \dots (3)$$

जहाँ A प्रथम पद तथा d सार्व अन्तर है।

समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (p-q)d$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{ab} = (p-q)d$$

$$\Rightarrow b-a = ab(p-q)d \quad \dots (4)$$

समीकरण (1) और (3) से,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = (p-r)d$$

$$\Rightarrow \frac{c-a}{ac} = (p-r)d$$

$$\Rightarrow c-a = ac(p-r)d$$

$$\Rightarrow (a-c) = ac(r-p)d \quad \dots (5)$$

समीकरण (2) और (3) से,

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = (q-r)d$$

$$\Rightarrow \frac{c-b}{bc} = (q-r)d$$

$$\Rightarrow c-b = bc(q-r)d \quad \dots (6)$$

समीकरण (4), (5) तथा (6) को जोड़ने पर,

$$(b-a) + (a-c) + (c-b) = ab(p-q)d + ac(r-p)d + bc(q-r)d$$

$$\Rightarrow 0 = ab(p-q) + ca(r-p) + bc(q-r)$$

The End

.....